Contents lists available at MID Publisher International
Technology Sciences Insights Journal
Journal homepage: https://journal.midpublisher.com/index.php/tsij

Modifikasi pada Metode Optimasi Dinamika Spiral dengan Teknik Clustering dalam Menemukan Semua Solusi Sistem Persamaan Taklinear

Susi Lestari
Jurusan Manajemen dan Bisnis, Politeknik Negeri Batam, Batam, Indonesia

INFORMASI ARTIKEL

Sejarah Artikel:
Diterima: Juli 2024
Revisi: September 2024
Diterima: September 2024
Dipublikasi: November 20204

Kata Kunci:
Sistem Persamaan Taklinear, Optimasi Dinamika Spiral, Teknik Clustering, Barisan Sobol

*Penulis Korespondensi:
susi@polibatam.ac.id

ABSTRAK

Mencari solusi dari sistem persamaan taklinear masih merupakan pekerjaan yang menantang dalam sains komputasi. KA. Sidarto dan A. Kania[1] menggunakan metode optimasi dinamika spiral yang dikombinasikan dengan teknik clustering dan pemanfaatan barisan Sobol dalam membangun titik-titik awal pada fase diversi kasi untuk mendapatkan seluruh solusi dari sistem pada daerah terbatas dalam satu kali komputasi. Namun untuk dimensi pencarian yang cukup tinggi, waktu komputasi yang dibutuhkan lebih banyak. Pada paper ini, dilakukan modifikasi pada saat penentuan titik-titik sebagai pusat cluster untuk selanjutnya diterapkan optimasi spiral. Hasil yang diperoleh menunjukkan perbedaan waktu komputasi yang cukup signi kan antara metode optimasi spiral dengan teknik clustering dengan modi kasi dan tanpa modi kasi untuk dimensi pencarian $n > 2$.

ABSTRACT

Finding solutions to nonlinear systems of equations remains a challenging task in computational science. KA. Sidarto and A. Kania[1] used a spiral dynamics optimization method combined with clustering techniques and the use of Sobol sequences to generate initial points during the diversification phase, aiming to obtain all solutions from the system within a limited region in a single computation. However, for a sufficiently high search dimension, the required computation time increases. This paper makes modifications in determining the points as cluster centers, followed by the application of spiral optimization. The results show a significant difference in computation time between the spiral optimization method with clustering techniques with modifications and without modifications for search dimensions $n > 2$.

PENDAHULUAN

Masalah penyelesaikan sistem persamaan taklinear sering sekali ditemui aplikasinya dalam wilayah teknik dan praktis. Metode-metode bersifat deterministik dan metaheuristik sudah banyak dikembangkan untuk menyele saikan masalah ini dengan kelebihan dan kekurangannya masing-masing. Beberapa metode metaheuristik yang digunakan dilakukan dengan mengubah masalah mencari akar ini menjadi masalah optimasi.

KA. Sidarto dan A. Kania[1] menggunakan metode optimasi dinamika spiral dengan clustering serta peman faatan barisan Sobol untuk membangkitkan titik-titik awal di daerah pencarian untuk mencari solusi-solusi dari sistem persamaan taklinear. Dengan kombinasi teknik clustering dan optimasi spiral, seluruh akar-akar yang terdapat pada domain dapat diperoleh dalam satu kali program dijalankan. Pada kasus tertentu, untuk dimensi pencarian yang tinggi ($n > 2$), dibutuhkan jumlah titik awal lebih banyak yang dibangkitkan pada fase awal. Hal ini memungkinkan terbentuknya banyak cluster setelah fase clustering, yang mana pada setiap cluster dilakukan optimasi spiral untuk memperoleh kandidat akar.

Pasa Kearfott[2], salah satu sifat relevan dari suatu metode adalah e siensi dalam komputasi, yaitu jumlah total semua operasi komputer yang berlangsung. Untuk hasil yang sama, semakin sedikit operasi yang dibu tuhkan maka semakin e sien metode tersebut dalam menyesaikan suatu permasalahan. Pada paper ini dilakukan modi kasi pada metode yang diajukan oleh KA. Sidarto dan A. Kania[1], yaitu penambahan parameter ambang batas setelah fase clustering untuk menyeleksi titik-titik yang tetap layak dijadikan sebagai pusat cluster.

LANDASAN TEORI

Sistem Persamaan Taklinear

Perhatikan sistem persamaan taklinear berikut:

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$
$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$
$$\vdots$$
$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

Dimana $x_1, x_2, \ldots, x_n \in D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \Re^n$ dan $f_i: D \to \Re,\ i = 1, 2, \ldots, n$ merupakan fungsi-fungsi kontinu dengan paling tidak satu diantaranya taklinear.
Bentuk di atas dapat ditulis ke dalam vector:

$$f(x) = 0$$

Dimana $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^T$ dan $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$. Vector $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)^T \in D$ dikatakan solusi atau akar dari sistem jika $f(x^*) = 0$.

Fungsi berikut, memiliki nilai maksimum sebesar 1. Formulasi fungsi fitness pada persamaan (2) termotivasi oleh Aggarwal [3] menyelesaikan fungsi transenden dengan Algoritma Genetika. Dengan rumusan transformasi sistem persamaan taklinear menjadi fungsi di atas, metode optimasi global dapat digunakan untuk menemukan solusi dari sistem persamaan tersebut. Formulasi fungsi fitness dengan suatu nilai optimum global tertentu untuk masalah sistem persamaan taklinear di atas dapat bermacam-macam. Metode optimasi dinamika spiral merupakan salah satu metode optimasi global yang dapat dimanfaatkan untuk menyelesaikan sistempersamaan taklinear dengan mengubahnya menjadi masalah optimasi.

$$F(x) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$= \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{n} |\, f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)|}$$
$$= \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{n} |f_i(x)|}$$

METODE

Modifikasi pada Optimasi Dinamika Spiral dengan Teknik Clustering

Algoritma optimasi spiral n dimensi

Rotasi dari sebuah titik pada ruang dimensi n dengan koordinat yang saling tegak lurus dapat direpresentasikan sebagai komposisi dari rotasi-rotasi 2 dimensi yang didefinisikan pada ruang dimensi n. Matriks $R_{i,j}^{(n)}$ merupakan matriks rotasi bidang ukuran n dengan elemen-elemen sebagai berikut.

$$r_{ii} = r_{jj} = cos(\theta), \quad r_{ij} = -\sin(\theta), \quad \text{dan} \quad r_{ct} = \delta_{st} \ \forall r_{st} \in R_{i,j}^{(n)},$$

dengan

$$\delta_{st} = \begin{cases} 1, & \text{jika } s = t \\ 0, & \text{jika } s \neq t \end{cases}$$

Dalam konsep ini, matriks $R_{i,j}^{(n)}$ mirip dengan matriks identitas, namun berbeda pada posisi ke ii, ij, jj, dan ji. Perkalian vektor oleh matriks rotasi $R_{i,j}^{(n)}$ hanya akan mengubah komponen ke-i dan ke-j dari vector, tanpa memberikan pengaruh apapun pada komponen lainnya. Secara keseluruhan, akan terdapat kombinasi sebanyak $\frac{n(n-1)}{2}$ buah matriks rotasi bidang. $R^{(n)}$ adalah matriks $n \times n$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$R^{(n)} = \prod_{i=1}^{n-1} \left(\prod_{j=1}^{i} R_{n-1,n+1-j}^{(n)} \right)$$

Dapat diperhatikan bahwa $R^{(n)}$ adalah komposisi matriks rotasi $R_{i,j}^{(n)}$.

Formulasi model spiral di ruang dimensi n dengan menggunakan komposisi matriks rotasi di ruang dimensi n adalah sebagai berikut.

$$x(k+1) = diag_n(r, r, \ldots, r) R^{(n)} x(k),$$

Dengan

$$\begin{aligned} R^{(n)} &= R_{n-1,n}^{(n)} \times R_{n-2,n}^{(n)} R_{n-2,n-1}^{(n)} \times \ldots \times R_{2,n}^{(n)} \times \ldots \times R_{2,3}^{(n)} R_{1,n}^{(n)} \times \ldots \times R_{1,3}^{(n)} R_{1,2}^{(n)} \\ &= \prod_{i=1}^{n-1} \left(\prod_{j=1}^{i} R_{n-1,n+1-j}^{(n)} \right) \end{aligned}$$

dengan

$\theta (0 \leq \theta < 2\pi)$: sudut putar atau rotasi pada setiap bidang

r ($0 < r < 1$): faktor dilatasi spiral atau kecepatan konvergensi antara titik dengan pusat spiral setiap k.

Dengan menuliskan $rR^{(n)} = S_n(r, \theta)$, maka formula transformasi spiral dengan titik asal sebagai pusatnya adalah sebagai berikut:

$$x(k+1) = diag_n(r, r, \ldots, r) R^{(n)} \quad x(k) = S_n(r, \theta) x(k).$$

Secara umum, untuk sebarang titik pusat x^* , maka model transformasi spiral dapat ditulis:

$$x(k+1) = S_n(r, \theta) x(k) - (S_n(r, \theta) - I_n) x^*$$

Perhatikan masalah optimasi spiral berikut.

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} F(x), \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Algoritma Optimisasi Spiral untuk model spiral n dimensi yang dikembangkan oleh Tamura dan Yasuda[4] adalah sebagai berikut.

Input:

$m (\geq 2)$: banyaknya titik pencarian awal
$\theta (0 < \theta < 2\pi)$: besat sudut rotasi
$r (0 < r < 1)$: kecepatan konvergensi
$k_{\max}$: jumlah iterasi maksimum

Proses:

1. Bangkitkan titik awal secara acak $x_i(0) \in \mathbb{R}^n \quad i = 1,2, \ldots, m$ pada daerah pencarian.
2. Tetapkan $k = 0$.
3. Cari pusat spiral x^* dimana $x^* = x_{i_g}(0)$ dengan $i_g = \arg \max_i F(x_i(0)) \quad i = 1,2, \ldots, m$.
4. Perbaharui x_i dengan transformasi spiral:
$$x_i(k+1) = S_n(r, \theta) x_i(k) - (S_n(r, \theta) - I_n) x^* \quad i = 1,2, \ldots, m$$
5. Perbaharui $\mathbf{x}^*$:
$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_{i_g}(k+1), \;\; i_g = \arg \max_i F(x_i(k+1)), \quad i = 1,2, \ldots, m$$
6. Jika $k = k_{\max}$, maka stop. Jika $k < k_{\max}$, maka $k = k + 1$, kembali ke langkah 4.

Output: $\mathbf{x}^*$ adalah titik maksimum dari $F(\mathbf{x})$.

Sama seperti pada model spiral 2 dimensi, pada model n dimensi, untuk kasus minimisasi maka digunakan $-F(\mathbf{x})$ sebagai fungsi objektif.

Algoitma optimasi dinamika spiral dengan teknik clustering

KA. Sidarto dan A. Kania[1] mengembangkan algoritma clustering dengan menggunakan optimasi spiral untuk memperbarui titik-titiknya. Berikut algoritmanya.

Input:
m_{cl}: banyaknya titik awal yang dibangun pada fase *clustering*
$\gamma(0 < \gamma < 1)$: parameter ambang batas untuk nilai fungsi $g(\mathbf{x})$
$\varepsilon(0 < \varepsilon < 1)$: parameter penerimaan akar
$\delta(0 < \delta < 1)$: parameter untuk membedakan antara dua akar
k_{cl}: maksimum jumlah iterasi pada fase *clustering*
m, r, θ, k_{max}: parameter-parameter optimasi spiral pada fase intensifikasi

Proses:
Fase diversifikasi

1. Bangkitkan m_{cl} titik barisan Sobol sebagai titik awal pada domain pencarian $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$.
2. Tetapkan $k = 0$.
3. Ambil $x' = x_{i_g}(0)$ dengan $i_g = \arg\max_i F\big(x_i(0)\big) \quad i = 1,2, \ldots, m_{cl}$ sebagai pusat cluster yang pertama dengan jari-jari sebesar $\frac{1}{2}\left(\min_l |b_l - a_l|\right)$,
   $l = 1,2, \ldots, n$.
4. Untuk $i = 1,2, \ldots, m_{cl}$, lakukan langkah berikut:
   Jika x_i bukan pusat dari spiral yang sudah ada, maka lakukan fungsi cluster berikut dengan x_i sebagai input.
   Fungsi Cluster (input y)
   a. Temukan *cluster* dengan pusat terdekat dari y. Andaikan *cluster* tersebut adalah C dengan pusat *cluster* x_C.
   b. Misalkan x_t sebagai titik tengah antara y dan x_C.
   c. Bandingkan nilai $F(y), F(x_C)$, dan $F(x_t)$.
      - Jika $F(x_t) < F(y)$ dan $F(x_t) < F(x_C)$: Buat cluster baru dengan pusat y dan jari-jari sebesar jarak antara y dan x_t.
      - Lainnya, jika $F(x_t) > F(y)$ dan $F(x_t) > F(x_C)$: Buat cluster baru dengan pusat y dan jari-jari sebesar jarak antara y dan x_t. Ulangi kembali fungsi cluster dengan x_t sebagai input.
      - Lainnya, jika $F(y) > F(x_C)$, jadikan y sebagai pusat dari C.
   d. Ubah jari-jari C menjadi jarak antara y dan x_t.
5. Temukan $x^* = x_{i_g}(k+1), \;\; i_g = \arg\max_i F\big(x_i(k+1)\big), \quad i = 1,2, \ldots, m_{cl}$
6. Perbaharui x_i dengan transformasi spiral:
   $$x_i(k+1) = S_n(r_{cl}, \theta_{cl}) x_i(k) - (S_n(r_{cl}, \theta_{cl}) - I_n) x^*, \quad i = 1,2, \ldots, m_{cl}$$
   atur $k = k + 1$.
7. Lakukan langkah 4 sampai 6 sebanyak k_{cl} kali.

Fase Optimasi Spiral

8. Setelah selesai fase diversifikasi, kita memperoleh sejumlah n_C buah cluster : $C_1, C_2, \ldots, C_{n_C}$. Masing-masing cluster memiliki pusat x_{C_i} dan jari-jari $\rho_i (i = 1,2, \ldots, n_C)$. Lakukan algoritma optimisasi spiral pada setiap cluster untuk memperoleh calon titik maksimum di masing-masing cluster. Gunakan $m, r, \theta, k_{\max}$ sebagai parameter input pada fase ini, dengan $D_i = \left[x_{1,i} - \rho_i, x_{1,i} + \rho_i\right] \times \left[x_{2,i} - \rho_i, x_{2,i} + \rho_i\right] \times \ldots \times \left[x_{n,i} - \rho_i, x_{n,i} + \rho_i\right] \subset \mathbb{R}^n$ sebagai domain pada daerah pencarian dimana $\mathbf{x}_{C_i} =$

$\left(x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{n,i}\right)^T$,
$i = 1,2, \dots, n_C$.

Fase Seleksi akhir

9. Hanya ambil kandidat titik-titik maksimum yang memenuhi kondisi $1 - F(x) < \varepsilon$.
10. Andaikan pada langkah ke-9 diperoleh n_g buah calon titik maksimum, maka dari sebanyak n_g calon tersebut, pilih hanya kandidat yang memenuhi $\|x_i - x_j\| > \delta \quad i,j = 1,2, \dots, n_g$ dimana $\|x_i - x_j\|$ merupakan jarak antara kandidat x_i dan x_j. Untuk kasus $\|x_i - x_j\| \le \delta$, piilh hanya x_i sebagai titik maksimum jika $F(x_i) \ge F(x_j)$, sebaliknya, pilih x_j sebagai titik maksimum.

Output: Akar-akar dari sistem persamaan taklinear $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$.

Modifikasi pada algoitma optimasi dinamika spiral dengan teknik clustering

Pada paper ini dilakukan modifikasi berupa penambahan parameter ambang batas setelah langkah ke-7, untuk menentukan kelayakan suatu titik dijadikan sebagai pusat cluster. Modifikasi dapat ditulis sebagai berikut.

- Penambahan parameter ambang batas 1(0 < 1 < 1) sebagai input.
- Pada langkah ke-8, tambahkan kriteria F(xCi) > 1 sebelum melakukan optimasi spiral pada masing masing cluster.

Percobaan Numerik

Untuk memeriksa keberhasilan dari teknik yang diajukan, sekumpulan masalah dari berbagai masalah *bench mark* telah diperiksa. Pada penelitian ini, semua percobaan numerik dijalankan pada komputer personal yang dilengkapi dengan *processor* AMD A9 dengan frekuensi CPU 47-63 Hz dan dijalankan pada Windows 10. Kumpulan perintah (code) ditulis dengan menggunakan MATLAB R2019a

Pengujian masalah

Soal 1:

Pada percobaan KA. Sidarto dan A. Kania[1] yang dirujuk dari Sacco dan Henderson[5], digunakan sistem persamaan taklinear sebagai berikut.

$$f_1(x_1, x_2) = 0.5\sin(x_1 x_2) - 0.25\frac{x_2}{\pi} - 0.5x_1 = 0$$

$$f_2(x_1, x_2) = \left(1 - \frac{0.25}{\pi}\right)\left(e^{2x_1} - e\right) + e\frac{x_2}{\pi} - 2ex_1 = 0$$

dengan $D = \{(x_1, x_2): -1 \le x_1 \le 3, -17 \le x_2 \le 4\}$

Soal 2:

Pada KA. Sidarto dan A. Kania[1], sistem persamaan taklinear yang digunakan didefinisikan sebagai berikut.

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 - (x_1 - 2x_3)(x_2 - 2x_3) - 165 = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 x_2^3}{12} - \frac{(x_1 - 2x_3)(x_2 - 2x_3)^3}{12} - 9369 = 0$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{2(x_2 - x_3)^2 (x_1 - x_3)^2 x_3}{x_2 + x_1 - 2x_3} - 6835 = 0$$

dengan $D = \{(x_1, x_2, x_3): -40 \le x_1, x_2, x_3 \le 40\}$

Soal 3:
Dari Luo et al.[6] dan juga KA. Sidarto dan A. Kania[1], sistem persamaan dan domain yang dipilih adalah sebagai berikut.

$$f_1(\mathbf{x}) = x_1 + \frac{x_2^2 x_4 x_6}{4} + 0.75 = 0$$
$$f_2(\mathbf{x}) = x_2 + 0.405 e^{1+x_1 x_2} - 1.405 = 0$$
$$f_3(\mathbf{x}) = x_3 - \frac{x_4 x_6}{2} + 1.5 = 0$$
$$f_4(\mathbf{x}) = x_4 - 0.605 e^{1-x_3^2} - 0.395 = 0$$
$$f_5(\mathbf{x}) = x_5 - \frac{x_2 x_6}{2} + 1.5 = 0 f_6(\mathbf{x}) = x_6 - x_1 x_5 = 0$$
$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_6)^T \in \mathbb{R}^6$$

dengan $D = \{\mathbf{x}: -5 \le x_i \le 5, i = 1,2, \dots ,6\}$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil Numerik

Soal 1:
Dengan menggunakan parameter-parameret berikut:

$$m_{cl} = 2700, \quad \gamma = 0{,}01\,, \;\; \epsilon = 10^{-4}, \;\; \delta = 0{,}01, \;\; m_{cl} = 2, \;\; m = 100, \;\; r = 0{,}95, \;\; \theta = \frac{\pi}{4}, k_{max} = 300, \quad \gamma_1 = 0{,}1,$$

solusi yang diperoleh untuk sistem persamaan pada soal, sama dengan hasil yang diperoleh pada KA. Sidarto dan A. Kania [1]. Dengan parameter-parameter input ini, diperoleh sebanyak 289 cluster. Tanpa menggunakan parameter γ_1, sebanyak 12 solusi diperoleh dalam waktu 98.857 detik. Kemudian, setelah dilakukan pemilihan pusat cluster terbaik dengan parameter γ_1, tersisa sebanyak 163 cluster. Dengan penambahan parameter tersebut, seluruh solusi dapat diperoleh dalam waktu 51.94 detik

Soal 2:
KA. Sidarto dan A. Kania[1] mengeliminasi x_2 dari sistem dan menemukan akar-akar sebagai solusi dari sistem dua persamaan taklinear dengan dua variabel berikut:

$$g_1(x_1, x_3) = \frac{x_1 x_2^3}{12} - \frac{(x_1 - 2x_3)(x_2 - 2x_3)^3}{12} - 9369 = 0$$
$$g_2(x_1, x_3) = \frac{2(x_2 - x_3)^2 (x_1 - x_3)^2 x_3}{x_2 + x_1 - 2x_3} - 6835 = 0$$

dengan $x_2 = 2x_3 - x_1 + \frac{165}{2x_3}$.
Dengan menggunakan parameter-parameter berikut:

$$m_{cl} = 3000, \quad \gamma = 0{,}0001\,, \;\; \epsilon = 10^{-2}, \;\; \delta = 0{,}01, \;\; m_{cl} = 10, \;\; m = 100, \;\; r = 0{,}95, \;\; \theta = \frac{\pi}{4}, k_{max} = 300, \quad \gamma_1 = 0{,}0003,$$

Jumlah cluster yang dihasilkan sebelum ditetapkan dengan penambahan parameter ambang batas γ_1 adalah sebanyak 260 cluster dan membutuhkan waktu selama 32.574 detik untuk memperoleh dua buah solusi seperti pada KA. Sidarto dan A. Kania[1]. Setelah dilakukan eliminasi cluster dengan parameter γ_1, diperoleh sebanyak 45 cluster dan membutuhkan waktu selama 8.613467 detik untuk memperoleh akar-akar solusi.

Soal 3:
Dengan menggunakan parameter-parameter berikut:

$$m_{cl} = 2000, \quad \gamma = 0{,}01 , \ \epsilon = 10^{-3}, \ \delta = 0{,}01, \ m_{cl} = 2, \ m = 400, \ r = 0{,}95, \ \theta = \frac{\pi}{4}, k_{max} = 300, \quad \gamma_1 = 0{,}1,$$

Jumlah cluster yang dihasilkan sebelum ditetapkan dengan penambahan parameter ambang batas γ_1 adalah sebanyak 526 cluster dan membutuhkan waktu selama 268.09 detik untuk memperoleh dua buah akar sseperti pada KA. Sidarto dan A. Kania[1]. Setelah dilakukan eliminasi cluster dengan parameter γ_1, diperoleh sebanyak 74 cluster dan dibutuhkan waktu selama 40.85 detik untuk memperoleh solusi akar-akar.

KESIMPULAN

Modifikasi yang dilakukan pada kombinasi teknik clustering dengan optimasi spiral dalam melokalisasi dan men emukan akar-akar dari sistem persamaan taklinear efektif untuk mereduksi operasi komputer yang berlangsung selama program berjalan dan memberikan waktu eksekusi yang lebih singkat sehingga membuat komputasi dari metode optimasi spiral dan clustering dalam menemukan akar-akar sistem persamaan taklinear lebih efisien.

DAFTAR PUSTAKA

Sidarto, K. and Kania, A. (2015). Finding All Solutions of Systems of Nonlinear Equations Using Spiral Dy namics Inspired Optimization with Clustering.Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics, 19(5), pp.697-707.

Kearfott, R. (1987). Some tests of generalized bisection. ACM Transactions on Mathematical Software, 13(3), pp.197-220.

V. Aggarwal, Solving transcendental equations using Genetic Algorithm, http://web.mit.edu/varun ag/www/ste gas.pdf

K. Tamura and K. Yasuda, Spiral Dynamics Inspired Optimization, J. Adv. Computational Intelligence and Intelligent Informatics, 15 (8) (2011) 1116 1122

W. F. Sacco and N. Henderson, Finding all solutions of nonlinear systems using a hybrid meta-heuristic method with Fuzzy ClusteringMeans, Applied Soft Computing, Vol.11, pp. 5424-5432, 2011.

Y. Z. Luo, G. J. Tang, and L. N. Zhou, Hybrid approach for solving systems of nonlinear equations using chaos optimization and quasi- Newton method, Applied Soft Computing, Vol.8, pp. 1068-1073, 2008.